# いろいろな幾何構造(力学系と微分幾何学)



佐藤, 肇

数理解析研究所講究録
第 1576 巻 2008 年 120-133



# いろいろな幾何構造

名古屋大学　佐藤　肇 (Hajime Sato)
Nagoya University

## 0　はじめに

Klein の Erlangen Program によって提出された幾何学の指導原理として，幾何構造はその変換群により決定されるというものがある．この考え方の元に，Lie は連続変換群の理論を導入した．これは，微分方程式の変数変換とその求積法の問題に直結して考えられたものである．Lie は，無限小の方法を用いることで，群が有限個での定数で径数づけられる（有限次元の）場合に大きな成果をあげた．その後，この有限次元の連続群は Lie 群と呼ばれ，２０世紀の数学において充分に発展した．しかし残念なことに，Lie の研究の元である幾何構造や微分方程式の研究は，Cartan の革新的な研究にもかかわらず，それが理解されず，大きな空白の時代が訪れた．

２０世紀の後半になってようやく，数理物理学における解の具体的な表示の研究の影響もあり，Cartan の無限連続群の解読が進み，かなりの部分が理解できるようになるとともに，接続や曲率などの不変量の問題，微分方程式の延長と包合性の理論，特性系の理論などの研究が，発展するようになった．

この記録では，前半で Lie の (有限次元) Lie 群の基本定理の Cartan による「無限次元」Lie 群への拡張について記述する．この無限次元 Lie 群は，空間の微分同相の部分擬群である Lie pseudogroup として定義されるので，定義する空間の異なる場合にも，抽象的な群として同型かどうかが実は大きな問題となる．すなわち２つの Lie pseudogroup の同型の定義からが問題になってしまう．３つの基本的問題が残っている．

後半では，田中の理論に乗る（有限）単純 Lie 群が最大の変換群となるいくつかの幾何構造を挙げた．田中理論は別個に研究されている幾何構造がひとつの原理で統一されるという驚くべき結果であるが，個別の構造はそれぞれ固有の興味深い性質を持っている．放物型部分群の包含関係が，商空間の間のファイバー束を与える．ダブルファイバー束からツイスター対応が得られ，構造間の深い対応を与えることになるが，それについては詳しくはここでは述べない．

原稿の準備において，有用なアドバイスをくれた水谷忠良，待田芳徳の両氏に感謝する．

## 1　Lie pseudogroup

多様体 $N$ に値をもつ多様体 $M$ 上の ($k$ 次の) PDE 系とは，jet 空間 $J^k(M,N)$ の部分

多様体 $S \subset J^k(M,N)$ のことである．ここでは $N = M$ の場合，すなわち $S \subset J^k(M,M)$ を考える．

**定義 1.1** 多様体 $M$ の局所微分同相からなる pseudogroup $\mathcal{G}$ が **Lie pseudogroup** であるとは，ある PDE 系 $S \subset J^k(M,M)$ が存在して，$\mathcal{G}$ が，$S$ の局所解全体として定まるものである．$\mathcal{G}$ を $M$ 上の Lie pseudogroup といい，$S$ を Lie pseudogroup $\mathcal{G}$ の**定義系**という．

これが，Lie および Cartan の考えた連続群である．

局所微分同相からなる pseudogroup で，Lie pseudogroup でないものは，次のものがよく挙げられる．

**例 1.1** (Lie) $\mathcal{G} = \{f \times f \in \mathrm{Diff}(M \times M) \mid f \in \mathrm{Diff}(M)\}$ は pseudogroup ではあるが，Lie pseudogroup ではない．

**例 1.2** (Cartan) $\mathcal{G}$ を Lie pseudogroup する．1 点 $x_0 \in M$ の固定群 $\mathcal{G}_{x_0} = \{g \in \mathcal{G} \mid G(x_0) = x_0\}$ は pseudogroup ではあるが，一般には Lie pseudogroup ではない．
しかし固定群はこれから述べる基本定理では重要な役を演じる．

**定義 1.2** Lie pseudogroup $\mathcal{G}$ が**有限次元**であることを，定義系の一般解が，有限個の定数により径数づけられていて，関数分の解は存在しないことと定義する．そうでないときを，**無限次元**であるという．

今の数学で Lie 群というのは，有限次元のみを扱うから，有限次元 Lie pseudogroup を**局所 Lie 群**という場合もある．

**例 1.3** (有限次元, あるいは Chevalley の意味の) Lie 群は有限次元 Lie pseudogroup である．

**例 1.4** (Lie) $\mathrm{Diff}(S^1)$ の部分 Lie pseudogroup は，定義系が空でなければ，必ず 1 次分数変換 $PSL(2,\mathbb{R})$ の部分 Lie pseudogroup に限ることが示され，有限次元 Lie pseudogroup である．

**定義 1.3** ([Ca37], p.1360) Lie pseudogroup $\mathcal{G}$ が (Cartan の意味で) **正規**とは，定義系が 1 階の PDE 系であることである．

## 2 相似，延長，同型

Lie pseudogroup は，抽象的な pseudogroup ではなく，多様体 $M$ への微分同相としての作用を込めて定義されているので，(Lie groupoid などとは異なり,) それらの同型という概念の定義は明らかではない．

**定義 2.1** 多様体 $M_i$ $(i=1,2)$ 上の 2 つの Lie pseudogroup $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ が**相似**であるとは，微分同相 $\phi: M_1 \to M_2$ が存在して，$j^k(\phi)(\mathcal{S}_1)=\mathcal{S}_2$ が成立することである．

**定義 2.2** ([Ca04], p.184) $\pi:\widehat{M}\to M$ を多様体間の束写像とする．$\widehat{M}$ の局所微分同相からなる Lie pseudogroup $\widehat{\mathcal{G}}$ が $M$ の局所微分同相からなる Lie pseudogroup $\mathcal{G}$ の**延長** **(prolongation)** であるとは，すべての $\widehat{\mathcal{G}}$ の元 $\hat{g}$ は束写像で，従って底空間 $M$ の局所微分同相 $\pi_!(g)$ を定めるが，

$$\pi_!(g)\in\mathcal{G} \tag{1}$$

となっていることである．もし

$$\pi_!(g)=id. \quad\Rightarrow\quad g=id. \tag{2}$$

が成立するとき，$\widehat{\mathcal{G}}$ を $\mathcal{G}$ の**ホロエドリック (holoédrique) 延長** という．必ずしも (2) が成立しない延長を**メリエドリック (mériédrique) 延長** という．

**注意** . ホロエドリック延長を [Ku59-61] [LR98] [LR00] では isomorphic prolongation , [St] では one-to-one prolongation と呼んでいる．ホロエドリックという言葉を使った意味を [KS88, p.112] で推測している．

**定義 2.3** 2 つの Lie pseudogroup $\mathcal{G}_i$ が**ホロエドリックに同型** (あるいは単に**同型**) であるとは，それぞれのホロエドリック延長 $\widehat{\mathcal{G}}_i$ が存在して，それらが相似となることである．

**定義 2.4** 2 つの Lie pseudogroup $\mathcal{G}_i$ が**メリエドリックに同型**であるとは，それらを定義する関数の径数が一致していて，それぞれのホロエドリック延長とメリエドリック延長 $\widehat{\mathcal{G}}_i$ が存在して，それらが相似となるという条件で生成されている関係にあり，この同値の間にどこかでメリエドリック延長が含まれているものとする．

**注意** . 有限 Lie pseudogroup (局所 Lie 群) $\mathcal{G}_i$ は，定義する関数の径数はいづれも 0 次元で等しいから，有限 Lie pseudogroup がメリエドリックに同型であることは，一方から他方に全射準同型があるという条件で生成されている同値関係で等しいということである．

**例 2.1** ([Ca05] p.283)

$$\begin{aligned}
G_0 &= \{X=x+a, Y=y+f(x), Z=z+f'(x)\}\subset \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3_{xyz})\\
G_1 &= \{X=x+a,\ Y=y+f(x),\}\subset \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3_{xy})\\
G_2 &= \{X=x+a,\ Z=z+f'(x)\}\subset \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3_{xz})
\end{aligned}$$

は Lie pseudogroup である．実際，$G_0$ の定義系は

$$\frac{\partial X}{\partial x}=1,\ \frac{\partial X}{\partial y}=0,\ \frac{\partial X}{\partial z}=0,\ \frac{\partial Y}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Y}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Z}{\partial z}=1,\ \frac{\partial (Y-y)}{\partial x}=Z-z$$

で与えられる．このとき，$G_0$ は $G_1$ のホロエドリック延長であり，$G_0$ は $G_2$ のメリエドリック延長である．よって，$G_1$ と $G_2$ はメリエドリックに同型である．ところが，$G_1$ と $G_2$ は，それぞれの定義より相似であり，特にホロエドリックに同型である．このように，無限次元 Lie pseudogroup の間ではホロエドリック同型かつメリエドリック同型であることが起こる．

**定義 2.5** ([Ca05] p.284) 2つの Lie pseudogroup $\mathcal{G}_i$ が**プロパーにメリエドリックに同型**であるとは，それらにホロエドリック延長が存在しないでメリエドリックに同型となることである．ホロエドリック延長が存在するものの間にメリエドリック同型が存在するとき，それらは**非プロパーにメリエドリックに同型**であるという．

**定義 2.6** ([Ca05] p.284) 有限 Lie pseudogroup $\mathcal{G}$ が**単純**とは，正規部分（不変部分）Lie pseudogroup が，自明なものに限るものである．これは，非自明なメリエドリックに同型な局所群は存在しないといっても良い．無限 Lie pseudogroup $\mathcal{G}$ が**プロパー単純**とは，非自明な (プロパーでも非プロパーでも) メリエドリックに同型な Lie pseudogroup は存在しないことである．無限 Lie pseudogroup $\mathcal{G}$ が**非プロパー単純**とは，非自明な非プロパーなメリエドリックに同型な Lie pseudogroup は存在して，非自明なプロパーなメリエドリックに同型な Lie pseudogroup は存在しないことである．

Cartan は [Ca08] の序文で，無限 Lie pseudogroup の正規部分群列の研究で，非プロパー単純な群が重要であるかも知れないと述べている．

## 3 推移性，プリミティブ

**定義 3.1** $\mathcal{G}$ を 多様体 $M$ 上の Lie pseudogroup とする．$\mathcal{G}$ が **推移的 (transitive)** であるとは，任意の点 $x \in M$ に対して，ある近傍 $U \ni x$ が存在して，すべての $y \in U$ に対して，$g(x) = y$ となる $g \in \mathcal{G}$ が存在することである．

**例 3.1** 例 (2.1) の $\mathbb{R}^3$ 上の Lie pseudogroup $G_0$, $\mathbb{R}^2$ 上の Lie pseudogroup $G_i$ $(i = 1, 2)$ は推移的ではない．

推移的でない Lie pseudogroup の延長は決して推移的にはならない．

**定義 3.2** $\mathcal{G}$ を 多様体 $M$ 上の Lie pseudogroup とする．$\mathcal{G}$ が **非プリミティブ** であるとは，$\mathcal{G}$ が $M$ 上の非自明な葉層構造 (Frobenius 条件を満たす分布) を保つことである．そうでないときを**プリミティブ** であるという．

**例 3.2** 例 (2.1) の $\mathbb{R}^3$ 上の Lie pseudogroup $G_0$, $\mathbb{R}^2$ 上の Lie pseudogroup $G_i$ $(i = 1, 2)$ は葉層 $\{x = const.\}$ を保つので非プリミティブである．

単純な Lie pseudogroup はプリミティブであると結論づけたいが，特に非推移的の場合は難しい．

Cartan はプリミティブで推移的な解析的 Lie pseudogroup は次のものに限ることを示した．ここで，$\mu$，$\Omega_n$，$\omega_n$ は体積要素，シンプレクティック形式，接触形式を表わす．

$$\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{SDiff}(\mu),\ \mathbb{R}\cdot\mathrm{SDiff}(\mu),\ \mathrm{Sp}(\Omega_n),\ \mathbb{R}\cdot\mathrm{Sp}(\Omega_n), \mathrm{Ct}(\omega_n) \tag{3}$$

## 4 Cartan による Lie の基本定理

Cartan による Lie pseudogroup に対する3つの Lie の基本定理を述べよう．

**定理 1** [第1基本定理] すべての Lie pseudogroup は包合的な正規な（1次PDEの）Lie pseudogroup $\mathcal{G}$ にホロエドリックに延長される．$\mathcal{G}$ は $x_1,\ldots,x_n$ を座標系にもつ $n$ 次元多様体 $M$ の上で定義され，次のものを不変に保つ局所微分同相として定義される．

1. ある数 $h$ $(\le n)$ 個の $M$ 上の関数 (**不変関数** と呼ばれる) $I^1(x),\ldots,I^h(x)$,
2. $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ といくつかの補助変数 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_\nu)$ に依存する $n$ 個の $M$ 上の1次独立な1-形式 $\omega^i(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

**注意**．$\mathcal{G}$ が（有限次元）局所 Lie 群の場合 $\omega^i$ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ によらない．$\mathcal{G}$ が推移的なことと，不変関数 $I^j(x)$ が無いこと $(h=0)$ は同値である．

**定理 2 (第2基本定理)** 1-形式 $\omega^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は次の構造方程式を満たす．

$$d\omega^i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}c^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a^i_{jl}\omega^j\wedge\pi^l. \tag{4}$$

ここで $\pi^l$ は補助変数 $y_k$ の微分 $dy_k$ たちにもよる1-形式であり，$c^i_{jk}$，$a^i_{jl}$ は，$I^l(\boldsymbol{x})$ による関数で $\mathcal{G}$ で不変である．

**注意**．$a^i_{jk}$ は $I^1(x),\ldots,I^h(x)$ のみの関数である．$\mathcal{G}$ が（有限次元）局所 Lie 群の場合 $a^i_{jl}$ は消える．$\mathcal{G}$ が推移的な場合，構造関数 $c^i_{jl}$，$a^i_{jl}$ は定数となる．

**定理 3 (第3基本定理)** ある両立条件をみたす構造関数 $c^i_{jl}, a^i_{jl}$ に対し，構造方程式 (4) をもつ Lie pseudogroup が存在する．

## 5 構造方程式の構成例

**例 5.1** ([Ca37] p.1344, [St] p.388) $\mathbb{R}^1$ 上の Lie pseudogroup を

$$\mathcal{G} = \{X = ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

で定める．定義系は，$\dfrac{d^2X}{dx^2} = 0$ という 2 階 ODE となる．$J^2(1,1)$ の座標 $(x, X, p = \dfrac{dX}{dx}, q = \dfrac{dp}{dx})$ とすると 定義系は $S = \{q = 0\} \subset J^2(1,1)$ である．この ODE は，$(x,p) \mapsto (X, P)$ という $J^0(2,2)$ の元に対する，1 階 PDE 系

$$\widetilde{S} = \{X_x = p,\ X_p = 0,\ P_x = 0,\ P_p = 0\} \subset J^1(2,2) \tag{6}$$

とみなすことができる．この PDE 系は包合的である．$J^1(2,2)$ の接触形式の消滅を $\widetilde{S}$ に制限すると，

$$dX = pdx,\ dP = 0 \tag{7}$$

となる．$J^1(1,1)$ の接触形式は不変であり，$J^0(\mathbb{R}^2_{xp}, \mathbb{R}^2_{XP})$ の元である延長は，$dX$ を不変にする．よって，不変 1 形式の 1 つとして，$\omega^1 = pdx$ を得る．外微分したものも不変になるから，

$$d\omega^1 = dp \wedge dx = pdx \wedge \left(-\frac{dp}{p}\right) = \omega^1 \wedge \left(-\frac{dp}{p}\right) \tag{8}$$

より，他の不変 1 形式の 1 つとして，$\omega^2 = -\frac{dp}{p}$ を取ることができる．構造方程式は

$$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = 0 \tag{9}$$

となる．これは，1 次アフィン変換 Lie 群 $A(1) = \mathbb{R}^* \ltimes \mathbb{R}$ の Lie 代数の構造方程式に等しい．これが，包合的な 1 階ホロエドリック延長の構造方程式であることは，次のようにして確かめられる．$\omega^i$ を不変にする変換 $(x,p) \mapsto (X,P)$ は，条件

$$PdX = pdx, \quad \frac{dP}{P} = \frac{dp}{p} \tag{10}$$

の最初の式より，$X = X(x)$ で $P(x,p) = \frac{p}{X'(x)}$ を得る．2 つめの式に代入して，

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{P}dP = \frac{X'(x)}{p}\frac{X'(x)dp - pX''(x)dx}{(X'(x))^2} = \frac{dp}{p} - \frac{X''(x)}{X'(x)}dx. \tag{11}$$

従って，$X''(x) = 0$ である． これより，$X = ax + b,\ P = \frac{p}{a}$ となる．この変換 $(x,p) \mapsto (X,P)$ は，包合的な 1 階 PDE 系

$$\begin{pmatrix} X_x & X_p \\ P_x & P_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{P} & 0 \\ 0 & \frac{P}{p} \end{pmatrix} \tag{12}$$

を定義系とし，$x \mapsto X = ax+b$ から $(x,p) \mapsto (X,P)$ の対応は，ホロエドリック延長である．この $\mathcal{G}$ は，有限推移的な Lie pseudogroup である．

**例 5.2** (**[Ca37] p.1344, [St] p.389**) $\mathbb{R}^2_{xy}$ 上の非推移的 Lie pseudogroup を

$$\mathcal{G} = \{X = x + ay,\ Y = y \mid a \in \mathbb{R}\} \tag{13}$$

で定める．定義系 $\mathcal{S}$ は，0 階の方程式 $Y = y$ と 1 階 PDE 系

$$\begin{pmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(X-x)}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

からなる．$J^1(2,2)$ の接触形式の消滅を $\mathcal{S}$ に制限すると，

$$dX = dx + \frac{X-x}{y}dy, \quad dY = dy \tag{15}$$

となる．構造方程式を得るために，$X$ を 1 点に固定できるが，今 $X=0$ に固定する．よって，不変 1 形式として，$\omega^1 = dx - \frac{x}{y}dy$, $\omega^2 = dy$ を得る．外微分して，$d\omega^1 = -\frac{dx \wedge dy}{y} = -\frac{1}{y}\omega^1 \wedge \omega^2$ だから，構造方程式は

$$d\omega^1 = -\frac{1}{y}\omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = 0 \tag{16}$$

となる．$\frac{1}{y}$ あるいは $y$ は不変関数である．これが，包合的な 1 階ホロエドリック延長の構造方程式であることは，次のようにして確かめられる．$y$ と $\omega^i$ を保つ変換 $(x,y) \mapsto (X,Y)$ は，方程式系

$$Y = y,\ dX - \frac{X}{Y}dY = dx - \frac{x}{y}dy,\ dY = dy \tag{17}$$

より，$d(X-x) = \frac{X}{Y}dY - \frac{x}{y}dy = \frac{X-x}{y}dy$ であり，$X-x$ は $y$ のみの関数となり，$X-x = f(y)$ と書かれて，$f'(y) = \frac{f(y)}{y}$ となる．これを解いて，$f(y) = ay$, $a \in \mathbb{R}$ となり，包合的な 1 階 PDE で定まる Lie pseudogroup $X = x+ay, Y = y$ が得られる．

**例 5.3** (**[Ca37] p.1345**) $\mathbb{R}^1$ 上の 1 次分数変換のなす Lie pseudogroup

$$\mathcal{G} = \left\{X = \frac{ax+b}{cx+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\} \tag{18}$$

を考える．$a,b,c,d$ を消去して，定義系 $X'X''' - \frac{3}{2}(X'')^2 = 0$ を得る．これは 3 階の微分方程式で，定義系は $\mathcal{S} = \{pr - \frac{3}{2}q^2 = 0\} \subset J^3(1,1) = \{(x,X,p,q,r)\}$ で与えられる 3 次元の空間である．$J^2(1,1)$ の接触形式の消滅は，

$$dX = pdx, \quad dp = qdx, \quad dq = \frac{3}{2}\frac{q^2}{p}dx \tag{19}$$

となる．よって(一般的な構成法により $X$，$dX-pdx$ が不変なので)，まず不変 1 形式として，$\omega^1=pdx$ を得る．外微分して，

$$d\omega^1 = dp\wedge dx = \frac{dp-qdx}{p}\wedge pdx = \frac{dp-qdx}{p}\wedge\omega^1 \tag{20}$$

だから，$\omega^2:=\dfrac{dp-qdx}{p}$ は不変 1 形式である．外微分して，

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= \frac{-pdq\wedge dx+qdp\wedge dx}{p^2} = \left(-\frac{1}{p^2}dq+\frac{q}{p^3}dp\right)\wedge\omega^1 \\ &= \left\{-\frac{1}{p^2}\left(dq-\frac{3}{2}\frac{q^2}{p}dx\right)+\frac{q}{p^3}(dp-qdx)\right\}\wedge\omega^1 \end{aligned} \tag{21}$$

だから，

$$\omega^3 := -\frac{1}{p^2}\left(dq-\frac{3}{2}\frac{q^2}{p}dx\right)+\frac{q}{p^3}(dp-qdx) = -\frac{1}{p^2}dq+\frac{q}{p^3}dp+\frac{1}{2}\frac{q^2}{p^3}dx \tag{22}$$

は不変 1 形式である．この外微分を計算して，結局構造方程式として，

$$d\omega^1=\omega^2\wedge\omega^3,\quad d\omega^2=\omega^3\wedge\omega^1,\quad d\omega^3=\omega^1\wedge\omega^2 \tag{23}$$

を得る．これは，Lie 群 $SL(2,\mathbb{R})$ の Lie 代数の構造方程式である．これが，包合的な 1 階ホロエドリック延長の構造方程式であることは，次のようにして確かめられる．$PdX=pdx(=\omega^1)$ より，$X=X(x)$ と書ける．$P=\dfrac{p}{X'}$ である．$\dfrac{dP-Qdx}{P}=\dfrac{dp-qdx}{p}(=\omega^2)$ より，$P=\dfrac{X''}{(X')^3}+\dfrac{1}{(X')^2}p$ を得る．さらに $-\dfrac{1}{P^2}dQ+\dfrac{Q}{P^3}dP+\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{P^3}dX=-\dfrac{1}{p^2}dq+\dfrac{q}{p^3}dp+\dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{p^3}dx(=\omega^3)$ を用いると，$X'X'''-\dfrac{3}{2}(X'')^2=0$ となり，$X=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ である．

**例 5.4** (**[Ca37] p.1346, [St] p.390**) $\mathbb{R}^2_{xy}$ 上の非推移的 Lie pseudogroup を

$$\mathcal{G}=\{X=x+f(y),\ Y=y \mid f\in\mathcal{F}(\mathbb{R})\} \tag{24}$$

で定める．定義系 $S$ は，0 階の方程式 $Y=y$ と 1 階 PDE $X_x=1$ からなる．$J^1(2,2)$ の接触形式の消滅を $S$ に制限すると，

$$dX=dx+udy,\quad dY=dy, \tag{25}$$

ただし，$u\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ であり，ただ 1 つの不変関数である．よって，不変 1 形式として，$\omega^1=dy$, $\omega^2=dx+udy$ を得る．外微分して，$d\omega^1=0$, $d\omega^2=du\wedge dy$ である．$\pi=-du$ と置いて，構造方程式は

$$d\omega^1=0,\qquad d\omega^2=\omega^1\wedge\pi \tag{26}$$

となる．これが，包合的な1階ホロエドリック延長の構造方程式であることは，次のようにして確かめられる．$y$ と $\omega^i$ を保つ変換 $(x,y,u)\mapsto(X,Y,U)$ は，方程式系

$$Y=y,\ dX+UdY=dx+udy \tag{27}$$

より，$d(X-x)=(u-U)dy$，従って，$X-x=f(y)$ と書くと $f'(y)=u-U$ となる．これより，$U=u-f'(y)$ である．$\mathbb{R}^3_{xyu}$ 上の Lie pseudogroup $\widetilde{\mathcal{G}}$ を

$$\widetilde{\mathcal{G}}=\{X=x+f(y),\ Y=y,\ U=u-f'(y)\mid f\in\mathcal{F}(\mathbb{R})\} \tag{28}$$

と定めると，これは包合的な1階 PDE であることがわかる．$\widetilde{\mathcal{G}}$ は $\mathcal{G}$ のホロエドリック延長である．

**例 5.5 (Lie, [Ca37] p.1346)** $\mathbb{R}^2_{xy}$ 上の推移的 Lie pseudogroup を

$$\mathcal{G}=\left\{X=f(x),\ Y=\frac{y}{f'(x)}\mid f\in\mathcal{F}(\mathbb{R})\right\} \tag{29}$$

で定める．$f'(x)=\dfrac{y}{Y}$ であり，定義系 $\mathcal{S}$ は，1階 PDE 系 $X_x=\dfrac{y}{Y}$，$X_y=0$，$Y_y=\dfrac{Y}{y}$ からなる．$J^1(2,2)$ の接触形式の消滅を $\mathcal{S}$ に制限すると，

$$dX=\frac{y}{Y}dy,\quad dY=udx+\frac{Y}{y}dy, \tag{30}$$

ただし，$u\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ である．$Y=1$ に固定して，不変1形式として，$\omega^1=ydy$，$\omega^2=udx+\dfrac{1}{y}dy$ を得る．外微分して，構造方程式

$$d\omega^1=\omega^2\wedge\omega^1,\qquad d\omega^2=\omega^1\wedge\pi, \tag{31}$$

を得る．ただし，$\pi=-\dfrac{1}{y}du$ である．$\mathcal{G}$ は，包合的な1階PDE であり，それ自身が，$\mathbb{R}^1$ 上の Lie pseudogroup $\mathcal{G}_1=\{X=f(x)\}$ のホロエドリック延長になっている．

## 6 基本問題

(i) 与えられた Lie pseudogroup と同型な Lie pseudogroup をすべて求めよ．

(ii) 与えられた Lie pseudogroup の部分 Lie pseudogroup をすべて求めよ．

(iii) 2つの Lie pseudogroup が同型かどうかを，構造方程式から判定する手段を確立せよ．

これらについて，Cartan は参考文献に引用した論文の中などでも，多様体 $M$ の次元が低い場合には，具体的な詳細な分類を与えている．Cartan の仕事は常に具体的な問題を扱い，それに対する新しい方法と結果を示すが，その後それらが検証されているものは非常に稀である．

# 7 有限次元単純 Lie 群から定まる構造

$G$ を実（または複素）半単純（有限）Lie 群とし，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．その階数を $\ell$ とし，$\mathfrak{h}$ を Cartan 部分代数する．

$\mathfrak{g}$ を表す Dynkin 図の白丸のうちのいくつかを黒丸として指定することにより，部分群 $P \subset G$ を次のように定める (山口 [Ya])．$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ を単純ルートの集合とし，$\Delta_1$ で黒丸として指定された単純ルートの集合を表す．$k \geq 0$ に対して，正のルートからなる集合 $\Phi_k^+$ を

$$\Phi_k^+ = \left\{\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} n_i\alpha_i \mid n_i > 0,\ \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} n_i = k\right\}$$

と定義する，ルート $\alpha_i$ の固有空間を $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ とする．$\mathfrak{g}$ の部分代数 $\partial$ を

$$\partial = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_0^+} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_k^+, k>0} \mathfrak{g}_\alpha$$

と定義する．このとき，

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_k^+,\ k>0} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

と置くと，$\mathfrak{g} = \partial \oplus \mathfrak{m}$ となる．$\partial$ を Lie 代数とする $G$ の部分 Lie 群を $P$ とする．$P$ は放物型部分群と呼ばれる．$G/P$ は体を $\mathbb{R}$ としたときは，R-space と呼ばれるものである．特に $\Delta_1 = \Delta$ とし，すべてを黒丸としたとき，$P$ は極大可解部分群で Borel 部分群と呼ばれる．このとき $G/P$ は $G$ の極大コンパクト部分群 $K$ の商空間と微分同相である．一方，$\Delta_1 = \emptyset$ とし，すべてを白丸とするとき，$P = G$ であり，$G/P$ は 1 点である．一般に常に $G/P$ は $K/(K \cap P)$ と微分同相となる．

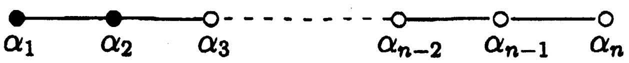
すべての放物型部分群 $P$ に対して，$G/P$ を平坦なモデルとする幾何構造が定まる．これは

$$\rho : P \to GL(\mathfrak{m})$$

を等方 (isotropy) 表現とすると，$\rho(P)$ を群としたときの，いわゆる $G$ 構造と同じものである．そのような幾何構造に対して，同値問題が，一意的に定まる接続の曲率で決定されるというのが田中の理論である ([Ta]).

## 7.1 $A$ 型の例

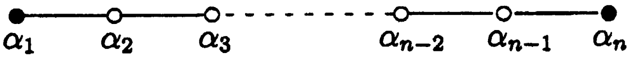
**例 1.** $G = SL(n+1, \mathbb{R})$



は，$G/P_{12} = SO(n+1)/SO(n-1) \cong T_1(S^n)$ の接触等方直線たちをモデルとする幾何構造で，2階 $(n-1)$ 未知関数常微分方程式系の幾何に対応する．( $P_{12}$ は黒丸が $\alpha_1, \alpha_2$ にあるもの)．これは，田中により，最初に田中理論が応用される典型的な例として研究され，擬射影構造と名づけられた (私は道構造という名のほうがわかり安いと思うが)．射影空間 $P^n$ を平坦モデルとする射影構造と，道全体のなす Grassman 空間 $Gr(n+1,2)$ をモデルとする2次超曲面シンプレクティック構造の2つを下部構造とするツイスター空間と見ることもできる．

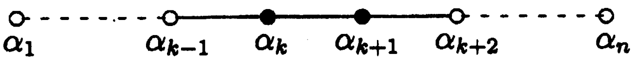
ずっと後に，田中の研究を知らずに行ったと思われる M. E. Fels の論文も出版された．

**例 2.** $G = SL(n+1, \mathbb{R})$




は，$G/P_{1n} = SO(n+1)/SO(n-1) \cong T_1(S^n)$ のファイバーである Legendre 多様体と横断的な Legendr 空間たちをモデルとする幾何構造である．これは，竹内 [Tk] により Lagrangean contact structure と名付けられ研究された．

**例 3.** $G = SL(n+1, \mathbb{R})$

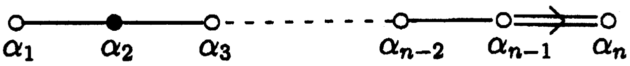



は，$G/P_{k\,k+1} = SO(n+1)/SO(k) \times SO(n-k)$ を，球面 $S^n$ 上の Grassman 空間 $Gr(n,k)$ 束と考え，ファイバーと横断的な $k$ 次元ベクトル空間が定める幾何構造を考える．これは，[MS] で co-Grassmann 構造と名付けられ研究された．

### 7.2 $B$, $D$ 型の例

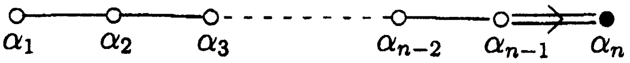
**例 4.** $G = SO(2n-1, 2)$

$B_n$:




又は，$D_n$ 型 $SO(2n-2,2)$ で同様に2つ目が黒丸の Dynkin 図形で表わされる．これは $G/P_2 = T_1(S^k)$ $(k = 2n-2$ 又は $k = 2n-3)$ をモデルとする Lie contact 構造で，[SY] で定義され研究された．

**例 5.** $G = SO(n+1, n)$

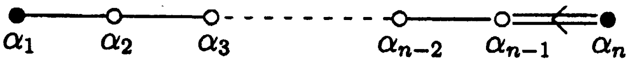


は，$G/P_n = SO(n+1)\times SO(n)/SO(n) \cong SO(n+1)$ を，定曲率空間 $S^n$ の枠束とみなすときの，水平部分空間が定める $n$ 次元分布ををモデルとする幾何構造である．$n$ 次元分布 $D$ が，最も完全積分可能から遠い，すなわち $\dim(D+[D,D]) = \frac{n(n+1)}{2}$ となるような $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元多様体の分布が定める構造ということもできる．特に $n=3$ の場合は，Bryant [Br] で調べられ，また Montgomery [Mon] で $(3,6)$ 型の分布と呼ばれ，サブリーマン構造の例として研究されている．

さらには，端の右２つを黒丸にした構造，または，右２つめだけを黒丸にする構造とのツイスター関係を調べることも興味深いと思われる．

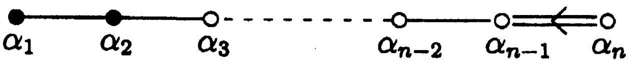
### 7.3 $C$ 型の例

**例 6.** $G = Sp(n,\mathbb{R})$



は，$G/P_{1n} = U(n)/SO(n-1)$ を，接触多様体 $S^{2n-1}$ 上の Legendre 部分空間全体と考え，ファイバーと横断的な $S^n$ の Legendre 空間の標準持ち上げによる葉層をモデルとする幾何構造である．これは，Wang [Wa] により Legendrian submanifold path geometry と名付けられ研究された．

**例 7.** $G = Sp(n,\mathbb{R})$



は，$G/P_{12} = U(n)/U(n-2)$ を，接触多様体 $S^{2n-1}$ 上の等方直線全体のなすファイバー束と考え，その上ののファイバーと横断的な等方直線たちをモデルとする幾何構造である．これは，低次元の場合 [OS] により調べられ，Fox [Fo] により高次元に拡張された，左端だけが黒丸の contact projective 構造上の contact path geometry である．[OS] は $n=2$ の場合，[SOS] は $n\geq 2$ の場合にこの幾何学の Schwarz 微分を定義し，微分同相群内のこの幾何学の変換群の特徴付けを決定した．[MSY] は contact path geometry をより幾何学的に考えることを提唱している．$2n+1$ 次元接触多様体 $M$ の球面接触分布束 $S_c(M)$ (4n 次元多様体) 上の contact path structure を，$M$ の接触形式の $S_c(M)$ への

引き上げ $\theta$ と $\theta^{\perp}$ の接触形式となる $S_c(M)$ 上の 1 形式 $\lambda$ から定めるものと考える方法である.

## 参考文献


[AH] M. Ackerman and R. Hermann, *Sophus Lie's 1880 Transformation Group Paper*, Math Sci Press, Brookline, Mass., 1975

[Br] R. Bryant, Conformal geometry and 3-plane fields, in "Developments of Cartan Geometry and Related Mathematical Problems", 数解研講究録, 1502 (2006), 1–15

[Ca04] Cartan, Elie, Sur la structure des groupes infinis de transformation. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure Ser. 3, 21 (1904), 153–206.

[Ca05] Cartan, Elie, Sur la structure des groupes infinis de transformation (suite). Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure Ser. 3, 22 (1905), 219–308.

[Ca08] Cartan, Elie, Les sous-groupes des groupes continus de transformation. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure Ser. 3, 25 (1908), 57–194.

[Ca09] Cartan, Elie, Les groupes de transformations continus, infinis, simples. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure Ser. 3, 26 (1909), 93–161.

[Ca37] E. Cartan, La structure des groupes infinis, Oeuvres Complètes,Part II, Vol.2, Gauthier-Villars, Paris (1953), 1335–1384.

[Fo] D.Fox, Contact Schwarzian Derivatives, Nagoya. Math. J., 179 (2005), 163–187 .

[KS88] N. Kamran and W.F. Shadwick, E.Cartan's method of equivalence and Lie pseudo-groups, Infinite-dimensional Lie algebras and their applications, ed. S. Kass, World Sci. Singapore, 1988, 108–129

[Ku59-61] M. Kuranishi, On the local theory of continuous infinite psudo-groups, I, Nagoya Math. J., 15(1959), 225–260, II, Nagoya Math. J., 19(1961), 55–91.

[Lie] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppe*, in gesammeite Abhandlunge, Vol 6, B. G. Teubner, Leipzig, 1927, 1–94.

See [AH] for English tranlation.

[LR98] G. Lisle and G. Reid, Geometry and structure of Lie pseudogroups from infinitesimal defining systems, J. Symbolic Comput. 26 (1998), no. 3, 355–379.

[LR00] G. Lisle and G. Reid, Cartan structure of infinite Lie pseudogroups, Geometric approaches to differential equations, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., 15, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 116–145.

[MS] Y. Machida and H. Sato Twistor theory of manifold with Grassmannian structures, Nagoya Math. J., 160 (2000), 17–102

[MSY] Y. Machida, H. Sato and K. Yamaguchi, Contact path geometry, in preparation.

[Mon] R. Montromery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics, and Applications*, AMS (2002).

[Mo05] O.I. Morozov, Structure of Symmetry Groups via Cartan's Method: Survey of Four Approaches, SIGMA: Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 1 (2005), paper 006.

[OS] T. Ozawa and H. Sato, Contact Transformations and their Schwarzian Derivatives, Advance Studies in Pure Math., 37 (2002), pp. 337-366.

[SY] H. Sato and K. Yamaguchi, Lie contact manifolds I. in "Geometry of Manifold", Academic Press (1989), 191–238.

[SOS] H. Sato, T. Ozawa and H. Suzuki, Differential Equations and Schwarzian Derivatives, in " Noncommutative geometry and physics 2005 (Proc. of the international Sendai-Beijing joint workshop)", World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd. (2007), 129-149.

[SS] I. M. Singer and S. Sternberg, The infinite groups of Lie and Cartan, Part I, (The transitive groups), J. d'Analyse Math., 15 (1965), 1–114.

[St] O. Stormark, *Lie's Structure Approach to PDE systems*, Encyclopedia of mathematics and its Applications, v.80, Cambridge Univ. Press, 2000,

[Tk] M. Takeuchi, Lagrangean contact structures on projective cotangent bundles. Osaka J. Math. 31 (1994), no. 4, 837–860.

[Ta] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras, Hokkaido Math. J., vol 8 (1979), 23–84.

[Wa] S. H. Wang, Legendrian submanifold path geometry, Math. Ann. 325 (2003), 249–277.

[Ya] K. Yamaguchi, Differential systems associated with simple graded Lie algebras, Adv. Studies in Pure Math., vol 22 (1993), 413–494.